ΚΕΦ 2ο | ΟΜΟΓΕΝΗΣ-ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ Γ.Δ.Ε.(ν-Τάξεως)

1) Να επιλυθεί η ομογενής Γ.Δ.Ε.

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0$$

αφού βρεθούν οι λύσεις της μορφής e^{cx}, $x \in \mathbb{R}$ (c: σταθ)

ΛΥΣΗ

$$(e^{cx})''' - 6(e^{cx})'' + 5(e^{cx})' + 12e^{cx} = 0$$

$$c^3 \cdot e^{cx} - 6 \cdot c^2 \cdot e^{cx} + 5c \cdot e^{cx} + 12e^{cx} = 0$$

$$c^3 - 6c^2 + 5c + 12 = 0$$

$$(c+1) \cdot (c^2 - 7c + 12) = 0$$

$$(c+1)(c-4)(c-3) = 0$$

Άρα, έχουμε $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{4x}$, $y_3(x) = e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{4x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 4e^{4x} & 3e^{3x} \\ e^{-x} & 16e^{4x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{4x} & e^{3x} \\ 0 & 5e^{4x} & 4e^{3x} \\ 0 & 15e^{4x} & 8e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-x} \begin{vmatrix} 5e^{4x} & 4e^{3x} \\ 15e^{4x} & 8e^{3x} \end{vmatrix} = e^{-x}\left(5e^{4x} \cdot 8 \cdot e^{3x} - 15 \cdot e^{4x} \cdot 4e^{3x}\right) =$$

$$= e^{-x} \cdot (40 \cdot e^{4x} \cdot e^{3x} - 60 \cdot e^{4x} \cdot e^{3x}) = e^{-x} \cdot (-20 \cdot e^{7x}) =$$

$= -20 \cdot e^{6x} \neq 0$, Άρα, οι y_1, y_2, y_3 γραμμ. ανεξάρτητες

Δηλ. $\{y_1, y_2, y_3\}$ ΒΣΛ της αρχικής εξίσωσης

Άρα, η γενική λύση της ομογενούς δίνεται από τη σχέση:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cdot e^{4x} + c_3 \cdot e^{3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } c_1, c_2, c_3 : \text{μοναδ. σταθ.}$$

(ή για τον υπολογισμό της WRONSKI

Έστω $x_0 = 0$. Άρα, $W(y_1, y_2, y_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 16 & 9 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$

Συνεπώς $W(y_1, y_2, y_3)(x) = W(y_1, y_2, y_3)(0) \cdot \exp\left(-\int_0^x \frac{-6}{1} dt\right) = \cdots = -20 \cdot e^{6x}$)

πιο άμεσος τρόπος

ή γ' τρόπος με τη μέθοδο σταθ συντελεστών

2) Να βρεθεί μια ομογενής Δ.Ε γραμμική με βασικό σύνολο λύσεων τις παρακάτω συναρτήσεις

$y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=\cos x$ και $y_3(x)=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Λύση

Για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

$$W(y_1,y_2,y_3)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\sin x & e^x \\ -\sin x & -\cos x & e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\sin x & e^x \\ 0 & 0 & 2e^x \end{vmatrix} = 2e^x \cdot \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= 2e^x(-\sin^2 x-\cos^2 x) = -2e^x \neq 0 \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Συνεπώς, η εξίσωση θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{W(y_1,y_2,y_3,y)}{W(y_1,y_2,y_3)}=0 \rightsquigarrow 2e^x \cdot \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^x & y \\ \cos x & -\sin x & e^x & y' \\ -\sin x & -\cos x & e^x & y'' \\ -\cos x & \sin x & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightsquigarrow 2e^x \cdot e^x \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 & y \\ \cos x & -\sin x & 1 & y' \\ -\sin x & -\cos x & 1 & y'' \\ -\cos x & \sin x & 1 & y''' \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow 2e^{2x} \cdot \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 & y \\ -\sin x+\cos x & -\cos x-\sin x & 0 & y'-y \\ -2\cos x & -2\sin x & 0 & y''-y \\ -\cos x-\sin x & -\cos x+\sin x & 0 & y'''-y \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow 2e^{2x} \begin{vmatrix} \sin x-\cos x & \cos x+\sin x & y'-y \\ 2\cos x & 2\sin x & y''-y \\ \cos x+\sin x & \cos x-\sin x & y'''-y \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow \ldots$$

3) ΝΔΟ εαν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ και μάλιστα γραμμ. ανεξάρτητες

τότε και οι $y_3 = y_1 + y_2$, $y_4 = y_1 - y_2$ είναι γραμμ. ανεξ.

λύσεις της εξίσωσης.

<u>ΛΥΣΗ</u>

y_1 και y_2 αποτελούν ενα ΒΣΛ $\{y_1, y_2\}$ της εξίσωσης

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ και μάλιστα την επαληθεύουν

Αρα, $\left\{\begin{array}{l} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{array}\right. \quad (1)$

$y_3 = y_1 + y_2$

Είναι, $y_3'' + p(x)y_3' + q(x)y_3 =$

$= (y_1+y_2)'' + p(x)(y_1+y_2)' + q(x)(y_1+y_2) =$

$= y_1'' + y_2'' + p(x)y_1' + p(x)y_2' + q(x)y_1 + q(x)y_2 =$

$= (y_1'' + p(x)\cdot y_1' + q(x)y_1) + (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \overset{(1)}{=} 0$

Αρα, η y_3 είναι λύση της παραπάνω ομογενούς Δ.Ε

Ομοια προκύπτει οτι

$$y_4'' + p(x) y_4' + q(x) y_4 =$$

$$= \left(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 \right) - \left(y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 \right) \overset{(1)}{=} 0$$

Αρα, η y_4 λυση της παραπάνω ομογενους Δ.Ε

Επειτα, γνωστό σε εμάς οτι:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow y_1, y_2 \text{ γραμμ. ανεξ.}$$

Εξετάζουμε

$$W(y_3, y_4) = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ y_3' & y_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 + y_2 & y_1 - y_2 \\ y_1' + y_2' & y_1' - y_2' \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{y_1 y_1'} - y_1 y_2' + y_2 y_1' - \cancel{y_2 y_2'} - \left(\cancel{y_1 y_1'} + y_1 y_2' - y_2 y_1' - \cancel{y_2 y_2'} \right) =$$

$$= -2 \left(y_1 y_2' - y_2 y_1' \right) = -2\, W(y_1, y_2) \neq 0 \rightsquigarrow y_4, y_3 \text{ γραμμ. ανεξ.}$$

4) Δίνεται η Δ.Ε

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x \quad , \quad x \neq 0 \qquad (E)$$

Να βρεθεί η γενική λύση, αναζητώντας λύσεις της μορφής $y(x) = x \cdot u(x)$.

ΛΥΣΗ

Γράφουμε την αντίστοιχη ομογενή ΓΔΕ

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \quad (E_0)$$

Παρατηρούμε ότι η $y_1 = x$ λύση της (E_0)

Για να βρούμε την άλλη λύση της (E_0)

Θέτω όπου $y(x) = x \cdot u(x)$ ή ισοδύναμα $y_2(x) = x u(x)$

$$y_2'(x) = u + xu' \rightsquigarrow y_2''(x) = 2u' + xu''$$

Άρα, στην (E_0):

$$xu'' + \cancel{2u'} - \cancel{\frac{2}{x} u} - \cancel{\frac{2}{x} x u'} + \cancel{\frac{2}{x^2} \cdot xu} = 0 \rightsquigarrow xu'' = 0 \overset{x \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2$$

Λόγω ότι ψάχνουμε μερική λύση οι σταθερές δεν μας ενδιαφέρουν, άρα αν θέσουμε $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

τότε $u = x \rightsquigarrow y_2 = x \cdot u = x \cdot x \Rightarrow y_2(x) = x^2$

όπου y_1, y_2 γραμμ. ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 > 0$$

$$y_{ομογ} = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

Αλλά, αναζητώ τη γενική λύση της μη ομογενούς (E)

$y_{μηομογ} = y_{ομογ} + y_μ$, $y_μ$: μερική λύση της μη ομογενούς (E)

Από γνωστό θεώρημα, έχουμε:

Εάν $\{y_1, y_2\}$ ΒΣΛ της (Εο)

και V_1, V_2 συναρτήσεις των:

$$\left.\begin{array}{l} V_1' \cdot y_1 + V_2' y_2 = 0 \\ V_1' \cdot y_1' + V_2' y_2' = x \end{array}\right| \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} V_1' \cdot x + V_2' \cdot x^2 = 0 \\ V_1' \cdot 1 + V_2' \cdot 2x = x \end{array}\right| \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x^2 - 2V_2' x^2 + V_2' x^2 = 0 \\ V_1' = x - 2V_2' x \end{cases} \to x^2 - V_2' x^2 = 0 \overset{x \neq 0}{\rightsquigarrow} \boxed{V_2' = 1}$$

άρα $\boxed{V_1' = -x}$

$V_2' = 1 \rightsquigarrow V_2 = x$ και $V_1' = -x \rightsquigarrow V_1 = -\frac{x^2}{2}$

Επομένως, $y_M = -y_1 \cdot \frac{x^2}{2} + y_2 \cdot x =$

$$= -\frac{x^3}{2} + x^3 = \frac{x^3}{2}$$

Τουτέστιν, $y_{\text{ΜΗ ΟΜΟΓ}} = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{x^3}{2}$, $\forall x \neq 0$.

5) Να επιλυθεί η μη ομογενής Γ.Δ.Ε

$(\sin^2 x)\, y'' - 2(\sin x \cdot \cos x)\, y' + (1 + \cos^2 x)\, y = \sin^3 x$, $x \in (0, \pi)$

αφού αποδειχθεί ότι οι $y_1(x) = \sin x$ & $y_2(x) = x \cdot \sin x$, $x \in (0, \pi)$

είναι δυο γραμ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αν αντικαταστήσουμε τις y_1, y_2 στην μη (δοσμένη) ομογενή διαπιστώνουμε ότι οι y_1, y_2 λύσεις της εξίσωσης αυτής

Ας έχουμε στο νου μας ότι: $\boxed{y_{\substack{\text{ΓΕΝΙΚΗ} \\ \text{ΜΗ ΟΜ}}} = y_{\substack{\text{ΜΕΡΙΚΗ} \\ \text{ΜΗ ΟΜ}}} + y_{\text{ΟΜΟΓ.}}}$ (*)

• <u>Για την $y_{\text{ΟΜΟΓ}}$</u> •

Οι y_1, y_2 γραμ. ανεξ. λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Γ.ΔΕ

Διότι $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \sin x & x\sin x \\ \cos x & x\cos x + \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x > 0$

Άρα, $y_{\text{ΟΜΟΓ}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot x \sin x$, $\forall x \in (0, \pi)$

• Για την $y_{\text{μερική μη ομογ}}$ •

α' τρόπος (safe)

Έστω συναρτήσεις v_1 και v_2 ώστε: (LAGRANGE)

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_2' y_1' + v_2' y_2' = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' \cdot \sin x + v_2' x \sin x = 0 \\ v_1' \cdot \cos x + v_2 \cdot (\sin x + x \cdot \cos x) = \sin x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' + v_2' \cdot x = 0 \Leftrightarrow v_1' = -v_2 x \\ -v_2' \cancel{x \cdot \cos x} + v_2 \sin x + \cancel{x v_2 \cos x} = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -v_2' x \\ v_2 \cdot \cancel{\sin x} = \cancel{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -v_2' x \\ v_2' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -x \\ v_2' = 1 \end{cases}$$

για κάθε $x \in (0, \pi)$

$$\left.\begin{array}{l} v_1' = -x \rightsquigarrow v_1 = -\frac{x^2}{2} \\ v_2' = 1 \rightsquigarrow v_2 = x \end{array}\right\} \rightsquigarrow y_{\text{μερική μη ομογ}} = -\frac{x^2}{2} \cdot \sin x + x^2 \sin x = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x$$

Και έτσι, $y_{\text{γενική μη ομογ}} = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot x \cdot \sin x + \frac{x^2}{2} \cdot \sin x, \ x \in (0, \pi)$

β' τρόπος

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} 0 & x \sin x \\ 1 & x \cos x + \sin x \end{pmatrix} = -x \sin x$$

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 1 \end{pmatrix} = \sin x$$

$$y_{\text{μερική μη ομογ}} = y_1(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \cdot \frac{\sin^3 t}{\sin^2 t} dt +$$

$$+ y_2(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \cdot \frac{\sin^3 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= \sin x \int_{\pi/2}^{x} (-t) \, dt + x \sin x \int_{\pi/2}^{x} dt =$$

$$= \sin x \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) - x \sin x \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

και ξαναπηγαίνουμε στην (*)